معادلات فولترا التكاملية من النوع الأول

لتكن لدينا معادلة فولترا التكاملية من النوع الأول

$$\int_a^x K(x,T)\, g(t)\, dt = f(x) \quad (1)$$

ونفرض أن

1] $K(x,T)$ و $K_x(x,T)$ تابعان مستمران في المنطقة $0 \le x \le a$ ، $x \le T$

2] $K(x,x) \neq 0$ من أجل جميع قيم المتحول x

3] $f(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق في المجال $[0,a]$ ، $f(a) = 0$

عندئذ المعادلة (1) تتحول إلى معادلة فولترا التكاملية من النوع الثاني والعكس صحيح

البرهان

باشتقاق المعادلة (1) بالنسبة لـ x

$$K(x,x)\, g(x) + \int_a^x K_x(x,T)\, g(T)\, dT = f'(x)$$

وبقسمة طرفي العلاقة على $K(x,x)$

$$g(x) + \int_a^x \frac{K_x(x,T)}{K(x,x)}\, g(T)\, dT = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \quad (2)$$

والعكس أيضاً صحيح نضرب طرفي العلاقة الأخيرة (2) بـ $K(x,x)$ ثم ... $f(a)=0$

$$g(x)\, K(x,x) + \int_a^x K_x(x,T)\, g(t)\, dT = f'(x)$$

$$\int_a^x K(x,T)\, g(t)\, dt = \int_a^x f'(z)\, dz$$

$$= f(z)\Big|_a^x = f(x) - f(a) = f(x)$$

حالة خاصة

ندرس فيما يلي معادلة تكاملية من النوع الأول شواذة من الشكل

$$K(x,T) = \frac{H(x,T)}{(x-T)^{1-\alpha}} \qquad 0 < \alpha < 1$$

حيث $H(x,T)$ تابع مستمر وله مشتق مستمر بالنسبة لـ x

$$\int_0^x \frac{H(x,T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\, g(t)\, dt = f(x) \quad (3)$$

السؤال الذي يطرح

إثبات أن المعادلة (3) تحقق شروط تحول المعادلة إلى معادلة فولترا التكاملية من النوع الثاني وبالتالي لإيجاد الحل هو $g(x)$

الحل

نضرب طرفي المعادلة (3) بـ $(z-x)^{-\alpha}$ ونكامل بالنسبة لـ x من $x=0$ إلى $x=z$ نحصل على

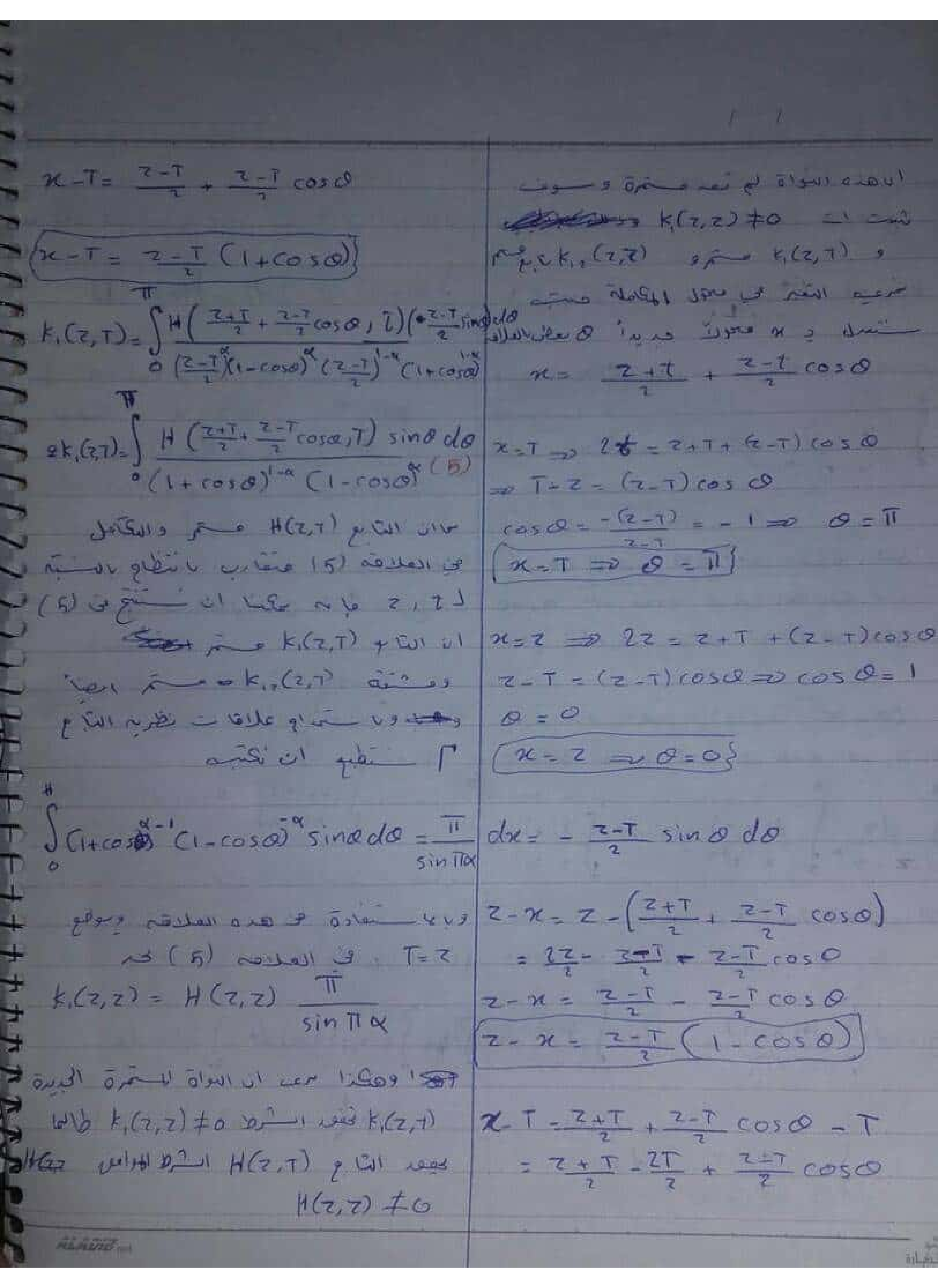
$$\int_0^z \frac{dx}{(z-x)^{\alpha}} \int_0^x \frac{H(x,T)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, g(t)\, dt = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{\alpha}}\, dx$$

بتطبيق دستور ديرخليه على الطرف الأيسر في العلاقة الأخيرة نحصل على المعادلة

$$\int_0^z g(t)\, dt \int_T^z \frac{H(x,T)}{(z-x)^{\alpha}(x-T)^{1-\alpha}}\, dx = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{\alpha}}\, dx \quad (4)$$

دالة النواة

$$K_1(z,T) = \int_t^z \frac{H(x,T)}{(z-x)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\, dx$$



ان هذه النواة لم تعد مستمرة وسوف نثبت ان $k_1(z,z)\neq 0$

و $k_1(z,T)$ مستمرة و $k_{12}(z,T)$ بعد تغيير المتحول في التكاملة حيث نستبدل x بمتحول جديد θ يعطى بالعلاقة

$$x=\frac{z+t}{2}+\frac{z-t}{2}\cos\theta$$

$$x=T \Rightarrow 2T=z+T+(z-T)\cos\theta$$

$$\Rightarrow T-z=(z-T)\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{-(z-T)}{z-T}=-1\Rightarrow \theta=\pi$$

$$\{x=T\Rightarrow \theta=\pi\}$$

$$x=z\Rightarrow 2z=z+T+(z-T)\cos\theta$$

$$z-T=(z-T)\cos\theta\Rightarrow \cos\theta=1$$

$$\theta=0$$

$$\{x=z\Rightarrow \theta=0\}$$

$$dx=-\frac{z-T}{2}\sin\theta\,d\theta$$

$$z-x=z-\left(\frac{z+T}{2}+\frac{z-T}{2}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{2z}{2}-\frac{z+T}{2}-\frac{z-T}{2}\cos\theta$$

$$z-x=\frac{z-T}{2}-\frac{z-T}{2}\cos\theta$$

$$z-x=\frac{z-T}{2}(1-\cos\theta)$$

$$x-T=\frac{z+T}{2}+\frac{z-T}{2}\cos\theta-T$$

$$=\frac{z+T}{2}-\frac{2T}{2}+\frac{z-T}{2}\cos\theta$$

$$x-T=\frac{z-T}{2}+\frac{z-T}{2}\cos\theta$$

$$x-T=\frac{z-T}{2}(1+\cos\theta)$$

$$k_1(z,T)=\int_0^\pi\frac{H\left(\frac{z+T}{2}+\frac{z-T}{2}\cos\theta,\,T\right)\left(\frac{z-T}{2}\sin\theta\right)d\theta}{\left(\frac{z-T}{2}\right)^{\alpha}(1-\cos\theta)^{\alpha}\left(\frac{z-T}{2}\right)^{1-\alpha}(1+\cos\theta)^{1-\alpha}}$$

$$k_1(z,T)=\int_0^\pi\frac{H\left(\frac{z+T}{2}+\frac{z-T}{2}\cos\theta,\,T\right)\sin\theta\,d\theta}{(1+\cos\theta)^{1-\alpha}(1-\cos\theta)^{\alpha}}\quad(5)$$

بما ان التابع $H(z,T)$ مستمر والتكامل في العلاقة (5) متقارب بانتظام بالنسبة لـ z, T فإنه يمكننا ان نستنتج من (5) ان التابع $k_1(z,T)$ مستمر ومشتقة $k_{12}(z,T)$ مستمر ايضاً ومن علاقات نظرية التابع Γ نستطيع ان نكتب

$$\int_0^\pi(1+\cos\theta)^{\alpha-1}(1-\cos\theta)^{-\alpha}\sin\theta\,d\theta=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

وبالاستفادة من هذه العلاقة وبوضع $T=z$ في العلاقة (5) نجد

$$k_1(z,z)=H(z,z)\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

وهكذا نجد ان النواة المستمرة الجديدة $k_1(z,T)$ تحقق الشرط $k_1(z,z)\neq 0$ طالما يحقق التابع $H(z,T)$ الشرط المرافق $H(z,z)\neq 0$

وبطريقة مماثلة اذا كان $f'(x)$ موجوداً

ومستمراً عندئذ ينتج من

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha}\, dx$$

تحل بطريقة التكامل بالتجزئة

$$u = f(x) \qquad dv = (z-x)^{-\alpha}$$

$$du = f'(x)\,dx \qquad v = -\frac{(z-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$f_1(z) = \left[-f(x)\frac{(z-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^z + \int_0^z \frac{(z-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\, d f'(x)\, dx$$

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{(z-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f'(x)\, dx$$

ينتج من العلاقة الاخيرة ان $f_1'(z)$ موجود ومستمر

$$f_1'(z) = \int_0^z (z-x)^{-\alpha} f'(x)\, dx$$

وبالتالي شروط نقل المعادلة

محققة اي ان لا حل وحيد هو $g(x)$

سوف نثبت الآن ان هذا الحل يحقق

معادلة المعادلة التكاملية الاصلية

$$\int_0^x \frac{H(x,T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\, g(t)\, dT = f(x) \quad (1)$$

سوف نثبت ان $g(x)$ هو حلاً للمعادلة

البرهان ــــ

من اجل ان نبرهن ان ذلك في المعادلة (1)

ثم نضع

$$w(x) = f(x) - \int_0^x \frac{H(x,T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\, g(t)\, dt$$

وسوف نثبت ان $w(x)$ مطابقاً للصفر

وذلك كما يلي

نضرب كلا من طرفي العلاقة الاخيرة $(z-x)^{-\alpha}$

ونكامل بالنسبة لـ x بين الحدين $0 \le x \le z$

نحصل على

$$\int_0^z (z-x)^{-\alpha} w(x)\, dx = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha}\, dx - \int_0^x \frac{H(x,T)}{(x-T)^{1-\alpha}}\, g(t)\, dt \int_0^z \frac{dx}{(z-x)^\alpha}$$

نطبق دستور ديرخلي على التكامل الثاني

من الطرف الايمن

$$\int_0^z (z-x)^{-\alpha} w(x)\, dx = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)}\, dx - \int_0^z g(t)\, dt \int_T^z \frac{H(x,T)}{(z-x)^\alpha (x-T)^{1-\alpha}}\, dx$$

اذا عوضنا بالطرف هذا الطلب بالاضافة الى الطلب الذي

نحصل استناداً الى (4) و (ل)

اذا اذا اما هذا السؤال بالعبور بدون الخطأ السؤال

سوف نثبت ان نقول بجعل الطرف الايمن مساوياً للصفر

$$\int_0^z (z-x)^{-\alpha} w(x)\, dx = 0$$

بضرب الطرفين $(u-z)^{\alpha-1}$ والمكاملة

بالنسبة لـ z بين الحدين $0 \le z \le u$

نحصل على

$$\int_0^u \frac{dz}{(u-z)^{1-\alpha}} \int_0^z \frac{\omega(x)}{(z-x)^{\alpha}}\, dx = 0$$

وبتطبيق دستور ديرخلي عن الطرف الأيسر

نحصل على العلاقة الجديدة

$$\int_0^u \omega(x)dx \int_x^u \frac{1}{(u-z)^{1-\alpha}(z-x)^{\alpha}}\, dz = 0$$

بإجراء التغيير

$$z = \frac{u+x}{2} + \frac{u-x}{2}\cos\theta$$

$$dz = -\frac{u-x}{2}\sin\theta\, d\theta$$

$z = x \Rightarrow 2x = u + x + (u-x)\cos\theta$

$\Rightarrow x - u = (u-x)\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$

$z = x \Rightarrow \theta = \pi$

$z = u \Rightarrow 2u = u + x + (u-x)\cos\theta$

$\Rightarrow u - x = (u-x)\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$

$z = u \Rightarrow \theta = 0$

$$u - z = u - \left(\frac{u+x}{2} + \frac{u-x}{2}\cos\theta\right)$$

$$u - z = \frac{u-x}{2}(1-\cos\theta)$$

$$z - x = \frac{u+x}{2} + \frac{u-x}{2}\cos\theta - x$$

$$z - x = \frac{u-x}{2}(1+\cos\theta)$$

بتبديل هذه القيم في التكامل الأخير

$$\int_0^u \omega(x)dx \int_0^\pi (1+\cos\theta)^{\alpha}(1-\cos\theta)^{1-\alpha}\sin\theta\, d\theta = 0$$

$$\frac{\pi}{\sin(1-\alpha)\pi}\int_0^u \omega(x)dx = 0$$

$$\int_0^u \omega(x)dx = 0$$

$$\omega(x) = 0$$

إذاً التابع $\omega(x)$ مطابق للصفر

بالتالي العلاقة

$$f(x) - \int_0^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}} g(t)\, dt = 0$$

سؤال: أوجد حل معادلة من أنواع التكاملية من النوع الأول وذلك بتطبيق تحويلات لابلاس الحالة الخاصة

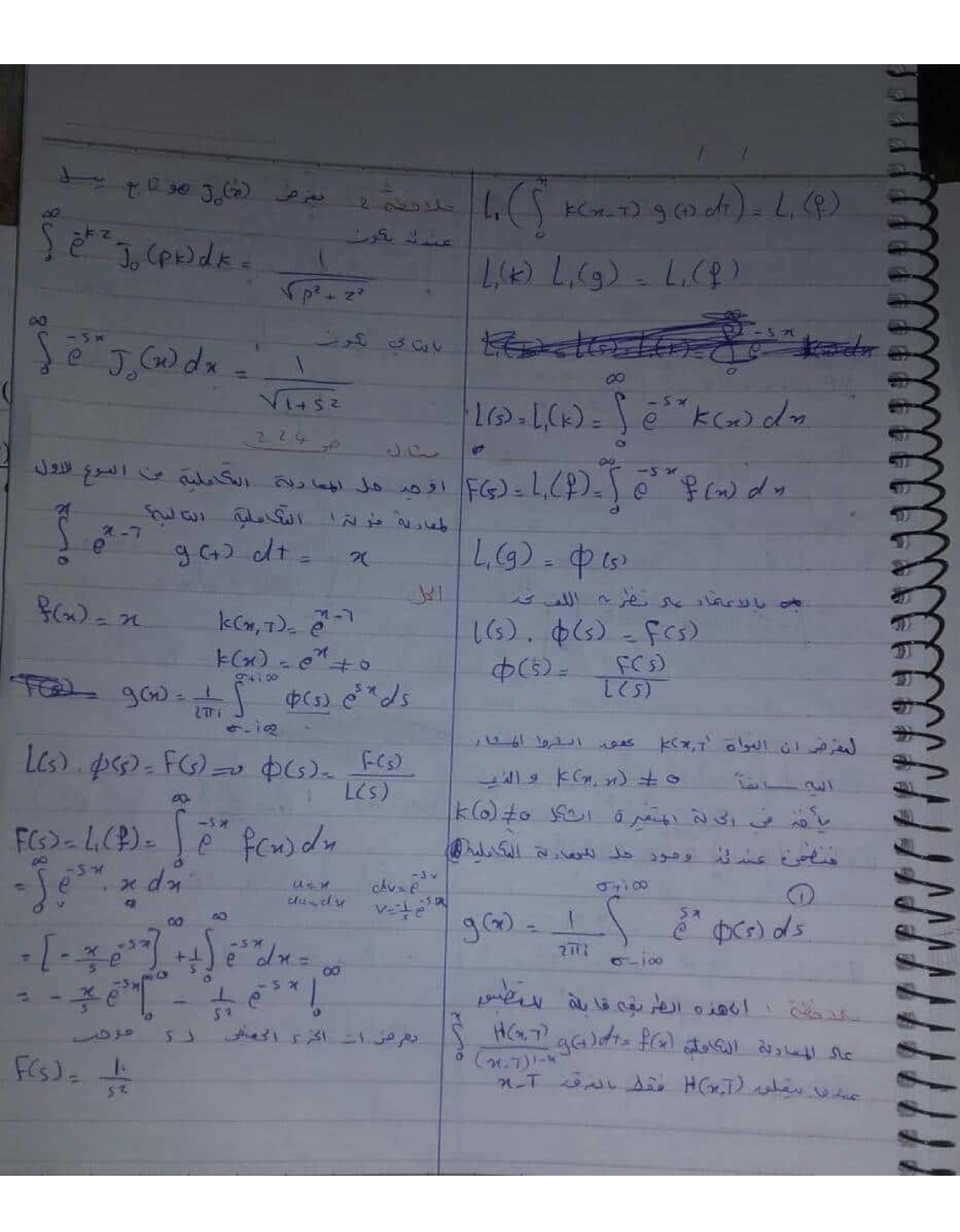
لتكن المعادلة

$$\int_0^x K(x-t)\, g(t)\, dt = f(x) \quad (1)$$

بضرب طرفي المعادلة (1) بـ e^{-sx} وبالمكاملة بالنسبة لـ x من $x=0$ إلى $x=\infty$ نحصل على

$$\int_0^\infty e^{-sx}dx \int_0^x K(x-t)\, g(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

نطبق تحويل لابلاس ونجد الآتي



$$L_1\left(\int_0^x k(x-T)\, g(t)\, dt\right) = L_1(f)$$

$$L_1(k)\, L_1(g) = L_1(f)$$

~~$L_1(k) = L(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} k(x) dx$~~

$$L(s) = L_1(k) = \int_0^{\infty} e^{-sx} k(x)\, dx$$

$$F(s) = L_1(f) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$L_1(g) = \phi(s)$$

وبالاعتماد على نظرية الالتفاف

$$L(s) \cdot \phi(s) = F(s)$$

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{L(s)}$$

لنفرض ان النواة $k(x,T)$ تحقق الشروط السابقة و الذي $k(x,x) \neq 0$ يأتي من ان الدالة المتغيرة الشكل $k(0) \neq 0$ فنلاحظ عندئذ وجود حل للمعادلة التكاملية ①

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} \phi(s)\, ds \quad ①$$

ملاحظة: ان هذه الطريقة قابلة للتطبيق على المعادلة التكاملية $\int_0^x \frac{H(x,T)}{(x-T)^{1-\alpha}} g(t)\, dt = f(x)$ عندما تتعلق $H(x,T)$ فقط بالفرق $x-T$

ملاحظة 2: نعرض $J_0(x)$ هو ... عندئذ نحصل

$$\int_0^{\infty} e^{-kz} J_0(pk)\, dk = \frac{1}{\sqrt{p^2 + z^2}}$$

بالتالي نحصل

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} J_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

مثال: ص 224

اوجد حل المعادلة التكاملية من النوع الاول

لمعادلة فولتيرا التكاملية التالية

$$\int_0^x e^{x-T} g(t)\, dt = x$$

الحل

$$f(x) = x \qquad k(x,T) = e^{x-T}$$

$$k(x) = e^{x} \neq 0$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \phi(s)\, e^{sx}\, ds$$

$$L(s) \cdot \phi(s) = F(s) \Rightarrow \phi(s) = \frac{F(s)}{L(s)}$$

$$F(s) = L_1(f) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

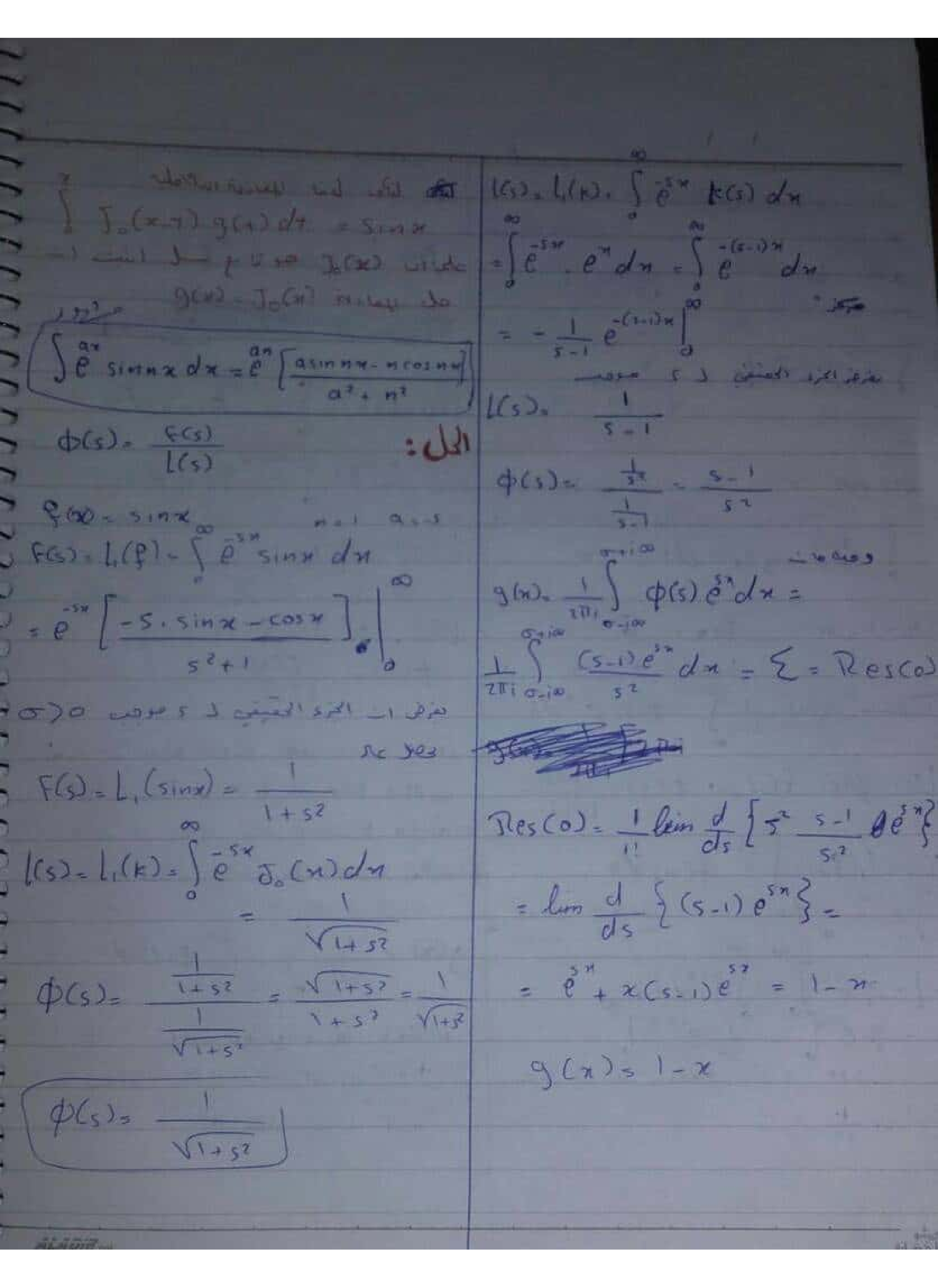
$$= \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot x\, dx \qquad u = x,\ du = dx,\ dv = e^{-sx},\ v = -\frac{1}{s} e^{-sx}$$

$$= \left[-\frac{x}{s} e^{-sx}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx =$$

$$= -\frac{x}{s} e^{-sx}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s^2} e^{-sx}\Big|_0^{\infty}$$

نعرض ان الجزء الاعلى ... لـ s موجب

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$



مثال: أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^x J_0(x-t)\, g(t)\, dt = \sin x$$

علماً بأن $J_0(x)$ هو [illegible] لـ [illegible]

حل بيان أن $g(x) = J_0(x)$

$$\int e^{ax} \sin nx \, dx = e^{ax}\left[\frac{a \sin nx - n \cos nx}{a^2 + n^2}\right]$$

الحل:

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{L(s)}$$

$f(x) = \sin x \qquad n = 1 \quad a = -s$

$$F(s) = L_1(f) = \int_0^\infty e^{-sx} \sin x \, dx$$

$$= e^{-sx}\left[\frac{-s \sin x - \cos x}{s^2 + 1}\right]\Bigg|_0^\infty$$

بفرض أن الجزء الحقيقي لـ s موجب $\sigma > 0$

عند ∞

$$F(s) = L_1(\sin x) = \frac{1}{1+s^2}$$

$$L(s) = L_1(k) = \int_0^\infty e^{-sx} J_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$\phi(s) = \frac{\frac{1}{1+s^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s^2} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$L(s) = L_1(k) = \int_0^\infty e^{-sx} k(s)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{x} dx = \int_0^\infty e^{-(s-1)x} dx$$

$$= -\frac{1}{s-1} e^{-(s-1)x}\Big|_0^\infty$$

بفرض الجزء الحقيقي لـ s موجب

$$L(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\phi(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{s-1}} = \frac{s-1}{s^2}$$

وبعد ما

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \phi(s)\, e^{sx} dx =$$

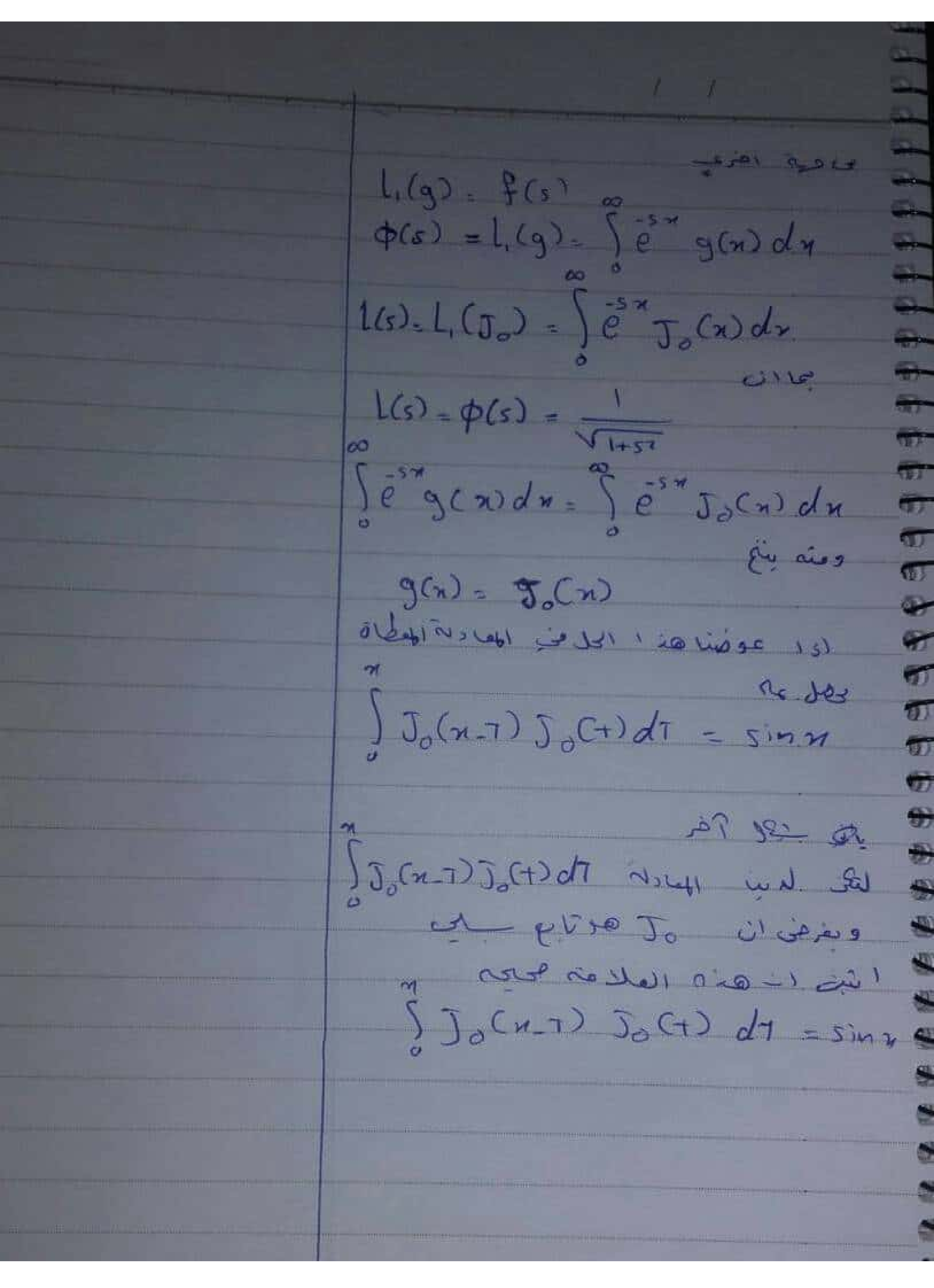
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(s-1)e^{sx}}{s^2} dx = \sum = Res(0)$$

$$Res(0) = \frac{1}{1!}\lim \frac{d}{ds}\left\{ s^2 \frac{s-1}{s^2} e^{sx}\right\}$$

$$= \lim \frac{d}{ds}\left\{(s-1)e^{sx}\right\} =$$

$$= e^{sx} + x(s-1)e^{sx} = 1 - x$$

$$g(x) = 1 - x$$



قاعدة الضرب

$L_1(g) = f(s)$

$\phi(s) = L_1(g) = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$

$L(s) = L_1(J_0) = \int_0^{\infty} e^{-sx} J_0(x)\, dx$

بما ان

$L(s) = \phi(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$

$\int_0^{\infty} e^{-sx} g(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} J_0(x)\, dx$

ومنه ينتج

$g(x) = J_0(x)$

اذا عوضنا هذا الحل في المعادلة المعطاة

نحصل على

$\int_0^{x} J_0(x-t) J_0(t)\, dt = \sin x$

بشكل آخر

لتكن لدينا المعادلة $\int_0^{x} J_0(x-t) J_0(t)\, dt$

ونفرض ان J_0 هو تابع بسل

اثبت ان هذه العلاقة صحيحة

$\int_0^{x} J_0(x-t) J_0(t)\, dt = \sin x$